

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих на второй курс

1. ④ Вычислить

$$\int_0^{\pi^2/16} \frac{dx}{\cos^2(\sqrt{x})}.$$

2. ⑤ Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \ln(1+x) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\arcsin 2x - 2 \operatorname{sh} x}.$$

3. ⑤ Исследовать несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра

$$\int_0^{+\infty} x^{-2\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x}{1+x^\alpha} dx.$$

4. ⑤ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n(1+nx)}.$$

5. ⑥ Линейное пространство L является множеством решений однородной линейной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти:

- а) ② базис \mathbf{e} в L , являющийся фундаментальной системой решений со свободными переменными x_1 и x_2 ;
- б) ② базис \mathbf{e}' в L , являющийся фундаментальной системой решений со свободными переменными x_3 и x_4 ;
- в) ② матрицу перехода от базиса \mathbf{e} к базису \mathbf{e}' .

ОТВЕТЫ

для поступающих на второй курс

1. ④ Вычислить

$$\int_0^{\pi^2/16} \frac{dx}{\cos^2(\sqrt{x})}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \ln 2$.

Инструкция: сделана замена переменной $x = y^2 - 1$ очко, произведено интегрирование по частям — 2 очка.

2. ⑤ Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \ln(1+x) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\arcsin 2x - 2 \operatorname{sh} x}.$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{2}$.

Инструкция: разложение одной из четырёх функций до $o(x^3)$ — 1 очко.

3. ⑤ Исследовать несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра

$$\int_0^{+\infty} x^{-2\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x}{1+x^\alpha} dx.$$

Ответ: сходится при $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, расходится при остальных α .

Инструкция: верно исследована сходимость интеграла с одной особенностью — 2 очка (\int_0^1 сходится при $\alpha < 1$, а $\int_1^{+\infty}$ сходится при $\alpha > \frac{1}{2}$).

4. ⑤ Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n(1+nx)}.$$

Ответ: сходится равномерно на E_1 ($0 < u_n(x) < \frac{1}{n^2}$) и неравномерно на E_2 ($u_n(n^2) \not\rightarrow 0$)

Инструкция: доказана сходимость на обоих множествах — 1 очко, исследована равномерная сходимость на одном множестве — 2 очка.

5.⑥ Линейное пространство L является множеством решений однородной линейной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти:

- а)② базис \mathbf{e} в L , являющийся фундаментальной системой решений со свободными переменными x_1 и x_2 ;
- б)② базис \mathbf{e}' в L , являющийся фундаментальной системой решений со свободными переменными x_3 и x_4 ;
- в)② матрицу перехода от базиса \mathbf{e} к базису \mathbf{e}' .

Ответ:

$$\text{а) } \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \mathbf{e}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \mathbf{e}' = \mathbf{e}S, \quad S = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Инструкция: в пунктах а) или б) базисные переменные выражены через свободные — 1 очко, в) выписано матричное уравнение на S — 1 очко.

ОЧКИ	ОЦЕНКА
0–1	НЕУД. (1)
2–3	НЕУД. (2)
4–5	УДОВЛ. (3)
6–7	УДОВЛ. (4)
8–10	ХОР. (5)
11–13	ХОР. (6)
14–16	ХОР. (7)
17–19	ОТЛ. (8)
20–22	ОТЛ. (9)
23–25	ОТЛ. (10)